ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I6 1985

УДК 514.75

Н.М. Шейдорова

ЗАДАНИЕ ДВУХСОСТАВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ $\mathcal{H}^{\tau}_{m} \subset P_n$

В работе приведены дифференциальные уравнения двухсоставного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ [4] в репере нулевого порядка $\mathcal{R}^0$. Доказано, что распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ существуют с произволом $\tau(n-\tau)+(n-m)(m-\tau)$ функций n аргументов. При $m=n-1$ двухсоставное распределение $\mathcal{H}^{\tau}_{m} \subset P_n$ является гиперполосным распределением $\mathcal{H}_{\tau} \subset P_n$, которое рассмотрено в работе А.В.Столярова [3].

Индексы принимают следующие значения:

$$\bar{I}, \bar{J}, \bar{K} = \overline{0,n}; \quad p,q = \overline{1,\tau}; \quad \alpha,\beta = \overline{m+1,n}; \quad a,b = \overline{1,m};$$
$$I, J, K = \overline{1,n}; \quad i,j = \overline{\tau+1,m}; \quad u,v = \overline{\tau+1,n}.$$

При внешнем дифференцировании принимается оператор ∇, введенный в работе [1].

1.Отнесем проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_{\bar{J}}\}$, инфинитезимальные перемещения которого:

$$d A_{\bar{J}} = \omega^{\bar{K}}_{\bar{J}} A_{\bar{K}}, \quad \text{где} \quad \mathcal{D}\omega^{\bar{K}}_{\bar{J}} = \omega^{\bar{J}}_{\bar{J}} \wedge \omega^{\bar{K}}_{\bar{J}}, \quad \sum_{\bar{J}} \omega^{\bar{J}}_{\bar{J}} = 0.$$

Совместим вершину A_0 репера $\{A_{\bar{J}}\}$ с текущей точкой X пространства P_n, тогда структурные формы точки приводятся к каноническому виду ω^{J}_{0}. Такой репер обозначим $\mathcal{R}^0$.

Определение. Пару распределений

$$\Delta\Lambda^u_p \stackrel{def}{\equiv} \nabla\Lambda^u_p - \Lambda^u_q \Lambda^v_p \omega^q_v + \omega^u_p = \Lambda^u_{pK}\omega^K_0, \tag{1}$$
$$\Delta M^{\alpha}_a \stackrel{def}{\equiv} \nabla M^{\alpha}_a - M^{\alpha}_b M^{\beta}_a \omega^b_\beta + \omega^{\alpha}_a = M^{\alpha}_{aK}\omega^K_0 \tag{2}$$

соответственно τ-мерных плоскостей Λ (Λ-распределение) и m-мерных плоскостей M (M-распределение) пространства P_n с отношением инцидентности

$$X \equiv A_0 \in \Lambda \subset M \quad (\tau < m \leq n-1) \tag{3}$$

их соответствующих элементов в каждом центре A_0 назовем двухсоставным распределением $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ [4],[5] или $M(\Lambda)$-распределением проективного пространства P_n, в котором Λ-распределение назовем базисным, M-распределение-оснащающим.

Плоскости $\Lambda(A_0)$, $M(A_0)$ натянуты соответственно на точки

$$A_0, L_p = A_p + \Lambda^u_p A_u; \qquad A_0, M_a = A_a + M^{\alpha}_a A_{\alpha}. \tag{4}$$

Относительно репера $\mathcal{R}^0$ дифференциальные уравнения $M(\Lambda)$-распределения в P_n имеют вид ([2]; при $m=n-1$ см.[3]):

$$\nabla\Lambda^u_p - \Lambda^u_q \Lambda^v_p \omega^q_v + \omega^u_p = \Lambda^u_{pK}\omega^K_0,$$
$$\nabla M^{\alpha}_i - M^{\beta}_i M^{\alpha}_j \omega^j_\beta - M^{\alpha}_p(\omega^p_i + M^{\beta}_i \omega^p_\beta) + \omega^{\alpha}_i = M^{\alpha}_{iK}\omega^K_0, \tag{5}$$

где

$$M^{\alpha}_p = \Lambda^{\alpha}_p - \Lambda^i_p M^{\alpha}_i. \tag{6}$$

Соотношения (6) характеризуют условия (3) инцидентности образующих элементов распределения (1) - (2). Система величин $\{\Lambda^u_p, \Lambda^u_{pK}, M^{\alpha}_i, M^{\alpha}_{iK}\}$ образует геометрический объект - фундаментальный объект 1-го порядка $M(\Lambda)$-распределения. Последующие продолжения полученных систем приведут к дифференциальным уравнениям для компонент фундаментальных объектов высших порядков $M(\Lambda)$-распределения. Последовательность фундаментальных объектов $M(\Lambda)$-распределения содержит на каждом этапе продолжения в качестве подобъекта фундаментальный объект соответствующего порядка басисного распределения (Λ-распределения).

2.Все уравнения, входящие в чистое замыкание системы (5), можно записать в виде

$$\Delta\Lambda^u_{pK} \wedge \omega^K_0 = 0, \quad \Delta M^{\alpha}_{iK} \wedge \omega^K_0 = 0, \tag{7}$$

где

$$\Delta\Lambda^u_{pK} \stackrel{def}{\equiv} \nabla\Lambda^u_{pK} - \Lambda^v_{pK}\Lambda^u_q \omega^q_v - \Lambda^u_{qK}\Lambda^v_p \omega^q_v + (\Lambda^u_q \delta^q_K - \delta^u_K)(\omega^0_p + \Lambda^u_p \omega^0_u) = \Lambda^u_{pKJ}\omega^J_0, \tag{8}$$

$$\Delta M^{\alpha}_{iK} \stackrel{def}{\equiv} \nabla M^{\alpha}_{iK} - M^{\alpha}_{pK}\omega^p_i - M^{\alpha}_a M^{\beta}_{iK}\omega^a_\beta - M^{\beta}_i(M^{\alpha}_{jK}\omega^j_\beta + M^{\alpha}_{pK}\omega^p_\beta) + (M^{\alpha}_a \delta^a_K - \delta^{\alpha}_K)(\omega^0_i + M^{\beta}_i \omega^0_\beta) = M^{\alpha}_{iKJ}\omega^J_0. \tag{9}$$

Определяя характеры системы (7), получим

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_n = r(n-r) + (m-r)(n-m), \tag{10}$$

откуда число Картана $Q = \frac{1}{2} n(n+1)[r(n-r)+(m-r)(n-m)]$. Так как функции Λ^u_{pkj}, M^α_{ikj} симметричны по индексам k,j, их число $N = \frac{1}{2}(n+1)n[r(n-r)+(m-r)(n-m)]$. Таким образом, $Q = N$, и следовательно, система уравнений (5), определяющая $M(\Lambda)$-распределение в репере $\mathcal{R}^0$, находится в инволюции.

Т е о р е м а . Двухсоставные распределения $\mathcal{H}^r_m \subset P_n$ существуют с произволом в $r(n-r)+(n-m)(m-r)$ функций n аргументов.

Список литературы

1.Лаптев Г.Ф.,Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I.-Тр.геометрич.семинара.ВИНИТИ АН СССР,1971,3,с.49-94.

2.Попов Ю.И.Инвариантные подпространства,ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. I.Калининградский ун-т,Калининград,1984,93с.(Рукопись деп.в ВИНИТИ АН СССР,2,07.1984,№ 4481-84 Деп.)

3.Столяров А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов.-Проблемы геометрии.Итоги науки и техники.ВИНИТИ АН СССР,7,1975,с.117-151.

4.Шейдорова Н.М. К геометрии двухсоставных распределений $\mathcal{H}^r_m \subset P_n$.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.14.Калининград,1983,с.111-115.

5.Шейдорова Н.М. О нормализации двухсоставных распределений проективного пространства.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.15.Калининград,1984,с.111-114.

УДК 514.75

С.В.Ш м е л е в а

КОНГРУЭНЦИИ КВАДРИК С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ,ПОРОЖДЕННОЙ ФОКАЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции $\mathcal{D}$ невырожденных линейчатых квадрик Q, имеющие одну невырождающуюся фокальную поверхность (A_0) и одну вырождающуюся поверхность (A_3), описанную фокальными точками второго порядка.Доказано,что если (A_3)-линия,то существует пять и только пять попарно пересекающихся классов конгруэнций $\mathcal{D}$.Точка A_3 для таких конгруэнций является двукратной фокальной точкой квадрики

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{D}$ к реперу $R = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_0A_i, A_3A_i -прямолинейные образующие квадрики $Q \in \mathcal{D}$ $(i,j,k = 1,2)$. Квадрика Q задается уравнением:

$$\mathcal{F} \equiv X^1X^2 - X^0X^3 = 0, \tag{1}$$

причем конгруэнции $\mathcal{D}$ удовлетворяют следующей системе уравнений Пфаффа

$$\omega^3_0 = 0, \ \omega^0_3 = 0, \ \omega^j_i = a^j_{ik}\omega^k, \ \omega^3_i - \omega^j = c_{ik}\omega^k,$$
$$\omega^0_i - \omega^j_3 = \lambda_{ik}\omega^k, \ \omega^i_3 = b^i_k\omega^k, \ \Omega \equiv \omega^0_0 - \omega^1_1 - \omega^2_2 + \omega^3_3 = h_k\omega^k, \tag{2}$$

где

$$c_{12} = c_{21}, \ \lambda_{12}b^1_1 - \lambda_{11}b^1_2 + \lambda_{22}b^2_1 - \lambda_{21}b^2_2 = 0, \tag{3}$$

$\omega^i \stackrel{def}{=} \omega^i_0$, ω^β_α $(\alpha,\beta,\gamma = 0,1,2,3)$ - компоненты инфинитезимальных перемещений репера R.

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i и j